Que pouvez-vous en déduire pour C_a et $C_{a'}$?

Montrer que MM' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Tracer, sur un même graphique, les courbes C_{-1}, C_0 et C_1 dans un même repère orthonormé (unité 2 cm).

Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

2. Dans cette question, on pose $a=\frac{3}{4}$.

a. On se propose d'étudier la position de la courbe $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à la droite D d'équation $y=x$, pour x positif.

A cet effet, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x-\ln\left(x^2+\frac{3}{4}\right)$

Etudier le sens de variation de g.

En déduire la position de $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à D.

b. Soit h la restriction de la fonction $f_{\frac{3}{4}}$ à $\mathbb{R}_+$.

Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble que l'on précisera.

c. Tracer la représentation graphique de h et de h^{-1} dans un repère orthonormé.

27 A/ Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x)=(x-1)^n\ln x$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x)=n\ln x+1-\frac{1}{x}$

a. Etudier les variations de φ_n.

b. Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2. a. Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b. Tracer les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2 et les droites $x=1$ et $x=2$.

B/ Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par $v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$, $n\geq 0$.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$u_n=\int_1^2 f_n(x)dx$.

2. Montrer que pour tout

$n\in\mathbb{N}^*,(n+1)u_n=\ln 2-\int_1^2\frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx$.

3. En déduire alors

a. La relation

$\frac{1}{2(n+2)}\leq \ln 2-(n+1)u_n\leq\frac{1}{n+2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Calculer la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On pose, pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout réel $x>0$,

$S_n(x)=1-(x-1)+(x-1)^2+\ldots+(-1)^n(x-1)^n$

a. Montrer que $S_n(x)=\frac{1}{x}-(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b. En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$\ln 2-v_n=(-1)^{n+1}\left[\ln 2-(n+1)u_n\right]$.

3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I/ 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x+1$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x\in[1,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie par

$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ 1 & \text{si } x=1.\end{cases}$

Montrer que f est continue à droite en 1.

3. a. Montrer que pour tout réel t de $[1,+\infty[$,

$t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$.

Qarray.tn - Agra Riadi - Qarray.tn